Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática

2021-1

Cálculo diferencial e integral avanzado
Sesión 13

9 de mayo de 2021

Sesión 13: Índice

1. Teorema de Schwartz

2. Funciones de clase C^k

3. Teorema de Taylor


Teorema de Schwartz

Teorema de Schwartz

Definición (2 veces diferenciable)

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en $a \in U$, entonces se dice que f es dos veces diferenciable en a. Diremos que f es 2 veces diferenciable sobre U, si es 2 veces diferenciable en cada punto de U.

Observación

Si f es dos veces diferenciable en a, entonces para todo $i, j = 1, 2, \cdots, n$, existen las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\,.$$

Además como sus derivadas parciales son diferenciables entonces son continuas y por tanto f es de clase C^1.

Definición ($k > 2$ veces diferenciable)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es $k-1$ veces diferenciable en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y si todas las derivadas parciales de orden $k-1$ son diferenciables en $a \in U$, entonces se dice que f es k veces diferenciable en a.

Teorema (T. Schwartz Global)

Dado $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ tal que existen las siguientes funciones derivadas $\frac{\partial f}{\partial y}\colon U \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\colon U \to \mathbb{R}$. Si dichas funciones son continuas en U, entonces existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\colon U \to \mathbb{R}$ y verifica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Demostración.

i) Dado $(x, y) \in U$, $b \in \mathbb{R}$ con $(x, b) \in U$, se tiene por el TFC:

$$\int_b^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\, dt = f(x, y) - f(x, b).$$

ii) Derivamos con respecto a x e ingresamos la derivada a la integral (Regla de Leibniz) debido a la continuidad de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, se obtiene

$$\int_b^y \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\, dt = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b).$$

Demostración.

iii) Se deriva con respecto a y. La conclusión se sigue usando de nuevo el TFC:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in U.$$

Observación

La función del Teorema de Schwartz no es continua en general. Por ejemplo, considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Existen las funciones derivadas parciales pero f no es continua.

Ejemplo

La función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

no verifica la relación de Schwartz global. ¿Por qué?

Solución

Condiciones que cumple f:

i) Calculamos la derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0, & (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Usando coordenadas polares demuestre que $\partial f/\partial y$ es continua en $(0,0)$. Por tanto $\partial f/\partial y$ es continua.

ii) Calculamos la función $\partial^2 f/\partial x\partial y$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 1, & (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Solución

iii) La función $\partial^2 f/\partial x\partial y$ no es continua, basta con probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

es divergente. Considere para eso los caminos $x = 0$ y $x = y$.

iv) Debido a iii) no se puede asegurar que se cumple el T. Schwartz Global.

v) Es más no cumple la identidad de Schwartz en $(0, 0)$, basta ver que para $y \neq 0$, se tiene $f(0, y) = 0$ y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x\left(x^2 + y^2\right)} = -y.$$

Solución

v) Luego,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{(\partial f / \partial x\,(0,y))}{y} = -1.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\,.$$


Funciones de clase C^k

Definición

Se dice que f es de clase C^k, con $k \in \mathbb{N}$, sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, lo que escribiremos: $f \in C^k(U)$, si todas las derivadas parciales de orden k de f existen y son continuas en U.

Definición

Se dice que f es de clase C^0 sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, si f es continua sobre U. También diremos que f es de clase C^∞ sobre U, si $f \in C^k(U)$ para todo $k \geq 0$.

Observación

Si $f \in C^k(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces f es $k-$veces diferenciable.

Observación

La viceversa no cumple, considere para $n = 1$, el sgte ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Esta es diferenciable pero no de clase C^1.

Observación

hay funciones de clase C^k que no son de clase C^{k+1}, considere para $n = 1$, el sgte ejemplo:

$$g(x) = x^k|x| := \begin{cases} x^{k+1} & , \text{si } x \geq 0, \\ -x^{k+1} & , \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Teorema (T. Schwartz Local)

Dada $f : U \to \mathbb{R}$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in U$. Si $f \in C^2(V)$, donde V es una vecindad de c, entonces se cumple para $i, j = 1, \cdots, n$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c).$$

Observación

Recordando la función del Ejemplo 1:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Esta verifica el T. Schwartz Local en todo $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. ¿Por qué no cumple en el origen?

Teorema de Taylor

Definición (Derivada segunda)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es 2 veces diferenciable en $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, se define la segunda derivada de f en a, como la aplicación bilineal, $f''(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuyo valor en el punto $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es el escalar

$$\begin{aligned} f''(a)(v, w) &:= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(a) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(a). \end{aligned}$$

Podríamos haber considerado $f \in C^2(U)$.

Definición (Derivada de orden $k > 2$)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es $k > 2$ veces diferenciable en $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, se define la k-ésima derivada de f en a, como la aplicación k-lineal:

$$f^{(k)}(a) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ veces}} \to \mathbb{R}, \ \text{t.q.}$$

para todo $(v_1, \cdots, v_k) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$:

$$f^{(k)}(a)(v_1, \cdots, v_k) = \frac{\partial^k f}{\partial v_k \cdots \partial v_1}(a).$$

Definición (Hessiana)

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se define la matriz Hessina de f en $x \in U$, $H(x)$, como

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right)_{i,j=1,\cdots,n},$$

siempre que existan las derivadas parciales de segun orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ en x para $i, j = 1, \cdots, n$.

Teorema (Taylor de orden 2)

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in U$. Si $f \in C^2(V)$, donde V es una vecindad de x_0. Entonces, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ con $x_0 + h \in V$, existe $0 < \xi < 1$ tal que
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + grad\, f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} hH(x_0 + \xi h)h^t.$$

Taylor de orden 2 (cont...)

También se puede escribir como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + grad\, f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h H(x_0) h^t + r(h),$$

donde $r(h)$ tiene la propiedad

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Observación

Por el T. de Schwartz local se tiene que la matriz Hessiana es simétrica.

Observación

Dado $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la segunda derivada de f en a, se expresa como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(a) &= \frac{\partial}{\partial h}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\\ &= hH(a)h^t.\end{aligned}$$

Teorema (Taylor de orden 3)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^3 en $x_0 \in U$, entonces la Fórmula de Taylor de orden 3 en x_0, se escribe como

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(x_0) &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0) h_i h_j h_k + r(h), \end{aligned}$$

Taylor de orden 3 (cont...)

donde el residuo verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^3} = 0,$$

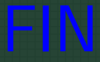
con $h = (h_1, \cdots, h_n)$.

Teorema (Taylor de orden k)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^k en $x_0 \in U$, entonces la Fórmula de Taylor de orden k en x_0, se escribe como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial h}(x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(x_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial h^k}(x_0) + r(h).$$

Donde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^k} = 0$.


FIN